Klasse F12T1
3. Schulaufgabe aus der Mathematik
am 27.04.2016

Analysis

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{2+2\ln\left(x^2\right)}{x^2}$ in ihrer Definitionsmenge $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

1.1 Untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie und berechnen Sie die Nullstellen. [4]

1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte an den Rändern der Definitionsmenge. [5]

1.3 Berechnen Sie die Funktionsterme $f'(x)$ und $f''(x)$ der ersten und zweiten Ableitungsfunktion. [4]
(Mögliches Zwerg.: $f'(x) = -4 \cdot \ln\left(x^2\right) \cdot x^{-3}$)

1.4 Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte und mit Hilfe von $f''(x)$ ihre Art. [4]

1.5 Zeichnen Sie den Graphen von f für $-3 \le x \le 3$. Maßstab: 1 LE = 2 cm [4]
Verwenden Sie dazu die bisherigen Ergebnisse und geeignete Funktionswerte.

1.6.0 Gegeben ist nun die Funktion F mit $F(x) = a \cdot \frac{\ln\left(x^2\right)}{x} + \frac{b}{x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
Für passende Werte von a und b ist sie eine Stammfunktion von f.

1.6.1 Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b so, dass F eine Stammfunktion von f ist. [5]
(Zur Kontrolle: $a = -2$, $b = -6$)

1.6.2 Der Graph von F besitzt zwei Extrempunkte. Geben Sie nur mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse die Abszisse eines der beiden Punkte an und begründen Sie die Art dieses Extremums. [3]

1.6.3 Der Graph von f begrenzt zusammen mit der x-Achse und der Geraden $x = k$; ($k \in \mathbb{R}^+$) ein endliches Flächenstück im I. Quadranten. [5]
Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück für k = 1,5 im Schaubild von Aufgabe 1.5 farbig.
Zeigen Sie, dass für die von k abhängige Maßzahl A(k) der Fläche gilt:
$$A(k) = 4\sqrt{e} - \frac{4 \cdot \ln(k) + 6}{k}$$

1.6.4 Ein zweites Flächenstück wird von der Gerade y = 2, dem Graphen von f und der x-Achse begrenzt. [5]
Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück im Schaubild von Aufgabe 1.5 andersfarbig und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts exakt.

Analytische Geometrie

2.0 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(3|-4|3)$, $B(-5|0|7)$ und $C(-1|-2|-3)$ sowie die Ebenen $E_k: x_1 + 2x_2 + \frac{1}{k}\cdot x_3 = 12$ mit $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gegeben.

2.1 Die Ebene F wird durch die Punkte A, B und C festgelegt.
Stellen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform auf.
Geben Sie an, welche besondere Lage die Ebene F bezüglich der Koordinatenebenen hat. [4]
(Mögliches Ergebnis: F: $x_1 + 2x_2 + 5 = 0$)

2.2 Berechnen Sie die Gleichung der Geraden s, unter der sich die Ebenen E_k und F schneiden. [5]

2.3 Berechnen Sie den Winkel α, unter dem sich die Ebene F und die Ebene E_1 (k=1) schneiden [4]

2.4 Vom Koordinatenursprung wird das Lot auf die Ebene F gefällt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes L. [3]